MATTESMEDJAN

NUMMER
01/2012

Mattesmedjan verkar för att ge matteglädje åt alla. Vi ordnar kurser, studiedagar och föreläsningar där rolig matematik, spel och problemlösning står i centrum.

Tretton steg - del 8

att lyckas med matematiken, med Sten Rydh

STEG 9.
Tilltro till det egna tänkandet.

Det viktiga är att tänka och ha tilltro till det egna tänkandet. Men för att tilltron ska växa måste man öva upp sitt matematiska tänkande steg för steg.

När man i skolan lär sig matematik har man av tradition utgått ifrån att det gäller att lära sig innehållet i en viss kurs eller lärobok. Mera sällan tänker man på hur viktigt det är att eleverna utvecklar sitt eget matematiska tänkande.

Det är i och för sig inget fel i att man i skolan har tydliga kunskapsmål - tvärtom! - och man kan med rätta hävda att det är viktigt att kraven på fasta kunskaper både upprätthålls och även höjs när de är på väg att försvinna.

Men det är också viktigt att eleverna i skolan får tid och möjlighet att tänka själva, reflektera, undersöka och pröva olika vägar både praktiskt och teoretiskt. Man behöver därför diskutera matematik tillsammans och både ha grundliga genomgångar där man lyssnar på läraren och laborativa övningar där eleverna själva får undersöka och pröva.

Målet måste hela tiden vara att det matematiska tänkandet utvecklas, så att eleven inte bara lär sig vissa formler eller metoder, utan att han eller hon verkligen funderar och tänker efter och anstränger sig att lösa problemen på egen hand. Det är därför bra om läraren ägnar mycket tid åt att samtala med eleverna och t.ex. frågar: Hur tänker du nu? Kan det vara på något annat sätt? Vilken metod

När upplevde du matematikens skönhet och glädje sist?

tycker du själv passar för den här uppgiften?

Om läraren ställer öppna frågor får eleverna möjlighet att ge en rad olika svar, som kan visa på nya vägar och möjligheter. Även ett svar som verkar tokigt eller helt felaktigt kan ge en bra utgångspunkt för en spännande diskussion. När man på det sättet arbetar med att utveckla tilltron till det egna tänkandet blir matematiken både rolig och intressant. Många viktiga resultat i matematikens historia har uppnåtts genom att någon - ofta mycket unga personer - har börjat ifrågasätta det som tidigare ansågs självklart och vedertaget.

Att tilltron till vårt eget tänkande är viktigt kan vi förstå om vi en stund funderar på vad matematik är och hur viktig matematiken har varit genom hela historien. När vi i skolan är angelägna om att eleverna skall lära sig matematik är det inte bara för att de ska få vissa praktiska kunskaper, t.ex. kunskaper om hur man genom enkel vardagsmatematik skall kunna klara sig bättre i samhället, även om detta är nog så viktigt. Nej, matematikens syfte är också - och framför allt - att vi genom matematiken skall kunna utveckla hela vårt tänkande och sedan tillämpa detta inom en rad olika områden. För att detta ska kunna ske måste matematikens kreativa och skapande sida också komma fram.

Matematik handlar i högsta grad om hur vi tänker. Ordet ”matematik” kommer av det grekiska ”máthema”, som betyder kunskap, studium, lärande. Det är alltså ett mycket centralt och viktigt begrepp, som vi har anledning att stanna inför och begrunda. Låt oss gå till de framstående grekiska tänkarna som i så hög grad fördjupade sig i matematiken.

Det är svårt att reda ut vad matematik och kunskap är. Det finns en rad olika teorier. Den viktigaste frågeställningen är kanske om det finns en av oss oberoende, objektiv verklighet, som vi på något sätt kan få kunskap om, eller om föremålet för vår kunskap är något rent subjektivt. Kanske är det en blandning av dessa två synsätt? Filosofen Platon (427-347 f. Kr.) menade att våra sinnesintryck är föränderliga och ofta lurar oss. Det beständiga och tillförlitliga finns endast i idévärlden. Vår verklighet är endast en skuggbild av denna idévärld. Den finns där oberoende av oss, medan vår uppgift är att försöka lära känna de sanna idéerna med hjälp av vår skuggvärld och vårt tänkande. Platon lade stor vikt vid matematiken, som utgör den fasta grunden i hela idévärlden. De matematiska sambanden finns där färdiga, och matematikernas uppgift är att försöka utforska och upptäcka dessa samband.

Filosofen Aristoteles (384-322 f. Kr.) ifrågasatte däremot tanken på idévärlden som skild från vår verklighet. Han menade istället att idén eller formen finns i själva föremålen, i materien. Alla våra undersökningar måste börja med att vi samlar in så mycket fakta som möjligt från vår omgivande verklighet. Idéerna finns inom människorna, djuren och tingen och vår uppgift är att utifrån den verklighet vi kan iaktta närmare undersöka vad som är gemensamt och vad som skiljer olika föremål, företeelser och begrepp. Aristoteles menade att allt har ett syfte, ett ändamål, och att vi genom empiriska undersökningar kan förstå detta syfte mycket bättre och dra allmänna slutsatser.

Går vi till matematiken i skolan idag skulle vi kunna säga att Aristoteles representerar den laborativa matematiken, där man är angelägen om att eleverna ska få en konkret och fysisk upplevelse av matematiken, medan Platon mer representerar den teoretiska matematiken med sin betoning av logiska, stringenta bevis och satser.

Nu behöver det ju inte vara någon verklig motsättning mellan dessa båda. Matematiken har ju både en praktisk och en teoretisk sida, och man brukar tala om ren och tillämpad matematik. Vi behöver lära oss mycket om båda dessa sidor eller aspekter av matematiken. Eleverna måste själva få pröva och upptäcka olika samband. Låt oss ta cirkeln och talet π (pi) som exempel. Om man t.ex. mäter omkretsen och diametern av olika hjul och andra cirkelformade föremål, kan man själv förvissa sig om att det finns ett bestämt samband mellan dem och att detta samband är att cirkelns omkrets är lite mer än 3 gånger diametern. Förhållandet omkrets/diameter kan med experiment fastställas till ungefär 3,1 eller 3,14 (eller mera exakt 3,14159265358979...) och detta tal betecknas ju sedan gammalt med den grekiska bokstaven π (pi), som står för periferi (omkrets). Detta är den praktiska sidan. När elever själva får pröva detta får de vanligen en bättre och klarare uppfattning om vad som menas med π än om de bara teoretiskt får lära sig det.

Rent teoretiskt är det faktiskt en mycket svår uppgift att fastställa vad π egentligen är. Den store matematikern Arkimedes (287-212 f. Kr.) brottades mycket med detta problem. Genom att använda sig av en cirkel med en omskriven och en inskriven 96-hörning, kunde han med stor noggrannhet stänga in värdet av π mellan vissa gränser. Arkimedes lyckades bevisa att värdet måste ligga mellan 3 1/7 och 3 10/71. Ändå skulle det dröja ända till slutet av 1800-talet innan matematikern Ferdinand von Lindemann (1852-1939) närmare kunde bevisa vilket slags tal π var. Lindemann visade att talet π inte kan vara rot till en algebraisk ekvation med rationella koefficienter, utan är ett s.k. transcendent tal. I och med denna upptäckt var också det gamla problemet med cirkelns kvadratur en gång för alla avgjort. Grekerna hade länge försökt att konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel med hjälpmedlen passare och linjal. Men ingen lyckades och man förmodade att det var omöjligt. Problemet har sysselsatt matematikintresserade i alla tider. Men i och med Lindemanns resultat var det bevisat att problemet är olösligt.

Det var också därmed bevisat att talet π inte kan skrivas exakt i formen av ett bråk, vilket många ”hobby-matematiker” ändå inte vill acceptera. Det brukar därför ibland komma in ”nya” idéer till de matematiska fakulteterna om hur talet π måste kunna skrivas som ett bråk. Ibland framförs också s.k. konspirationsteorier om att de professionella matematikerna känner till denna ”hemlighet” (alltså hur talet π kan skrivas som ett bråk, ett rationellt tal), men att de vägrar göra den känd för vanligt folk.

Med dessa exempel om cirkeln och talet π kan vi se hur matematiken sysslar med både praktiska och teoretiska frågor. En matematiker nöjer sig sällan eller aldrig med enbart ett praktiskt resultat. Matematikern vill också veta om det måste vara på just det sättet eller om det också finns andra lösningar. Först när någonting är teoretiskt strängt bevisat utifrån vissa axiom kan det betraktas som en matematisk sanning. Matematikern litar här inte på sina yttre sinnen, även om de har stor betydelse för intuitionen och den praktiska lösningen av ett problem. Den store matematikern Carl Friedrich Gauss (1777-1855) menade att vägen fram till en lösning inte får synas i det färdiga resultatet. Det är som med byggnadsställningar, som måste tas bort innan det fullbordade verket står klart. Därför arbetade också Gauss oerhört mycket på sina matematiska upptäckter, och förbättrade dem i flera omgångar innan han var nöjd. Först då presenterade han sina satser och matematiska teorier för omvärlden.

För elever i skolan på alla nivåer är det viktigt att träna sig i att "tänka som en matematiker". När eleven får en uppgift är det inte bara fråga om att hitta "det rätta svaret". Det gäller att läsa texten noga flera gånger för att verkligen förstå uppgiften och att sedan fundera noga på metodvalet. Man kan pröva sig fram, använda kända formler, göra en skiss eller ett diagram, använda ekvationer eller hitta på en egen metod som passar just för det här problemet. Det viktiga är att tänka och ha tilltro till det egna tänkandet. Men för att tilltron ska växa måste man öva upp sitt matematiska tänkande steg för steg. Det sker inte om man endast sysslar med rutinuppgifter som man redan vet hur man skall lösa. Den bästa träningen får man om man regelbundet ställs inför nya sorters problem, där man inte vet vilken metod man ska använda.

När eleven har kommit fram till en lösning är det viktigt att fundera på om det kanske också finns andra lösningar och om problemet kan generaliseras. Mycket bra är det också om läraren ger stimulans till eleverna att själva gå vidare och försöka förändra problemen eller komma på helt nya problem och se vad som då händer.

Samma sak gäller den laborativa matematiken. När eleverna laborerar, mäter och undersöker är det viktigt att de sedan får tid och tillfälle att diskutera resultaten och se vad det finns för samband. Om man t.ex. i en laboration undersöker volymen av en cylinder och en kon med samma höjd och samma basyta och finner att cylinderns volym är 3 gånger konens har man kommit fram till ett viktigt resultat som är matematiskt korrekt. Men det är viktigt att man då också går vidare: är detta någonting generellt för alla koner och cylindrar? Gäller det också rätblock och pyramider med samma höjd och bas? Och varför blir det just 3 gånger?

För att bevisa formeln för konens och pyramidens volym krävs kunskap om integraler, som man studerar i de högre gymnasiekurserna och som det krävdes en Arkimedes och en Newton att komma på och utveckla. Men redan i låg- och mellanstadiet kan man undersöka volymer på ett enkelt, laborativt sätt och fundera och samtala kring resultaten. Även de yngsta eleverna har ofta både roliga och smarta förklaringar. Ja, de yngre är ofta de mest kreativa som överraskar med alla möjliga goda idéer när de får chansen. Låt därför de yngsta få en för-förståelse av den matematik de kommer att möta högre upp i stadierna!

Om skolan bara vågar släppa sitt något ängsliga grepp om läroboken som främsta styrmedel och i stället på allvar börja träna alla elever i matematiska samtal och matematiskt tänkande med hjälp av laborativa metoder kommer matematikämnet också att bli mycket mer spännande och kreativt. Men givetvis kräver detta både kunniga och intresserade lärare, som ständigt fortbildar sig själva och engagerar sig. Under mina många föreläsningsresor och kurser runtom i landet möter jag mängder av sådana lärare, vilket är väldigt hoppfullt för den svenska skolan.

Kontakt

Mattesmedjan
Olympiavägen 7
666 30 Bengtsfors

0531-101 06
sten@mattesmedjan.se

www.mattesmedjan.se